Préparation à la rentrée ATS MDC du lycée de l'Escaut

Rappels

Exercices de mathématiques à faire sans calculatrice !

Conseils pratiques

Avant de commencer l'étude de ce livret, les tables de multiplication doivent être **parfaitement** connues.
La calculatrice pourra être utilisée comme **outil de vérification**.
Une évaluation non notée et basée sur ce livret sera effectuée en septembre.

Bonne étude dynamique !

Table des matières

1 Calculs numériques

1. 1 Priorité de calculs

Conventions

- Sans parenthèses, la multiplication et la division sont prioritaires par rapport à l'addition et à la soustraction (on effectue les calculs de la gauche vers la droite).
- Les parenthèses sont prioritaires.

Exemples

$4 \times 3 + 4 - 2 \times 5 = 12 + 4 - 10 = 6$

$4 \times (3 + 4) - 2 \times 5 = 4 \times 7 - 10 = 28 - 10 = 18$

<u>Exercice 1</u> Calculer : $A = 5 \times 7 - 3 \times 4$ $B = 6 - 2 \times 7 + 5$

1. 2 Fractions

Règles de calcul

Les règles suivantes sont valables lorsque les expressions considérées existent, c'est-à-dire, lorsque les dénominateurs des fractions ne sont pas nuls.

- Simplification : $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$ $\dfrac{a}{a} = 1$
- Addition : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$
- Multiplication : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- Inverse : L'inverse de $\dfrac{a}{b}$, avec $b \neq 0$ est $\dfrac{b}{a}$, puisque l'on a : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{\cancel{a} \times \cancel{b}}{\cancel{b} \times \cancel{a}} = 1$.
- Division: $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

Méthodes

- En règle générale, on essaye d'écrire une fraction sous la forme la plus simple possible dite *fraction irréductible*.
- Lorsqu'on multiplie des fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs.
  Mais on doit essayer de faire des simplifications pour éviter de faire des calculs trop compliqués et pour trouver une fraction irréductible.
- Pour additionner des fractions, on les réduit à un même dénominateur, puis on additionne les numérateurs. On essaye de trouver le plus petit dénominateur commun.

Exemples

1) Réduire la fraction $\frac{4}{6} = \frac{\cancel{2}\times 2}{\cancel{2}\times 3} = \frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$ est une fraction irréductible car 2 et 3 n'ont pas de multiple commun, on dit qu'ils sont premiers entre eux.

2) $\frac{4}{5}\times\frac{15}{8} = \frac{4\times 15}{5\times 8} = \frac{\cancel{4}\times 3\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times 2\times\cancel{4}} = \frac{3}{2}$

3) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6} = \frac{2\times 2}{3\times 2}+\frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}} = \frac{3}{2}$

4) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = \frac{1\times 2}{2\times 2}-\frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$

5) $\frac{1}{24}-\frac{12}{32} = \frac{1}{24}-\frac{\cancel{4}\times 3}{8\times\cancel{4}} = \frac{1}{24}-\frac{3\times 3}{8\times 3} = \frac{1-9}{24} = \frac{-8}{24} = \frac{-\cancel{8}\times 1}{3\times\cancel{8}} = \frac{-1}{3}$

6) $\frac{12}{5}\div\frac{3}{10} =$ ou $\frac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{12}{5}\times\frac{10}{3} = \frac{\cancel{3}\times 4\times 2\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{3}} = \frac{8}{1} = 8$

7) $\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{\cancel{2}\times 1}{3\times\cancel{2}\times 2} = \frac{1}{6}$

8) $\frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{1}\times\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

<u>Exercice 2</u> Calculer et mettre le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ $\quad B = \frac{11}{2}\times\frac{20}{33}$ $\quad C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)$ $\quad D = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{5}{3}$

$E = \frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{8}\right)$ $\quad F = \frac{2}{3}\times\frac{10}{3}-1$ $\quad G = \left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)$ $\quad H = \frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}$

1. 3 Puissances

- Définition : Pour tout nombre réel a non nul et pour tout entier naturel non nul n :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

De plus, on a $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad\quad a^0 = 1.$

Les règles suivantes sont valables pour tous réels non nuls a et b, et, pour tous entiers naturels non nuls n et p.

- Multiplication : $\quad a^n \times a^p = a^{n+p}$
- Puissance d'une puissance : $\quad \left(a^n\right)^p = a^{np}$
- Division : $\quad \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- Compatibilité avec le produit et le quotient : $\quad (ab)^n = a^n b^n \quad\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemples

1) $3^2 = 9$
2) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$
3) $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$
4) $\dfrac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$
5) $\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$ ou $\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64$
6) $5^6 \times 2^6 = \left(5 \times 2\right)^6 = 10^6 = 1000000$

- **Priorité de calculs**

Pour évaluer des expressions, il faut tenir compte de l'ordre dans lequel les opérations sont écrites. Il faut donc évaluer dans cet ordre :

1. ce qui se trouve à l'intérieur des parenthèses,
2. les puissances,
3. la multiplication et la division de la gauche vers la droite,
4. l'addition et la soustraction de la gauche vers la droite.

Exemples

1) $4^2+3^2=16+9=25$

2) $(4+3)^2=7^2=49$

3) $\left((-4)^2+3\right)^2=(16+3)^2=19^2=361$

4) $4^2+3\times(-2)=16-6=10$

5) $\left(4^2+3\right)\times(-2)=(19)\times(-2)=-38$

6) $\dfrac{6^4}{\left(2^2\times 3\right)^2}=\dfrac{2^4\times 3^4}{2^4\times 3^2}=9$

7) $\dfrac{3^2\times 2}{2^2+2}=\dfrac{9\times 2}{6}=3$

Exercice 3 1) Calculer 3^4 ; $(-2)^3$, -10^2, 5^{-1}, 2^{-2} et 3^{-2}.

2) Calculer et mettre le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A=\frac{-2^0}{3}+\frac{-2^1}{3}+\frac{-2^2}{3} \text{ et } B=\left(\frac{-2}{3}\right)^0+\left(\frac{-2}{3}\right)^1+\left(\frac{-2}{3}\right)^2.$$

3) Écrire le nombre $C=\dfrac{3^4\times 3^2}{3^{-3}\times 3^4}$ sous la forme d'une puissance de 3.

4) Soit n un entier naturel. Écrire le nombre $D=\dfrac{3^{3n+1}}{2^{n-1}}$ sous la forme d'un produit $a\times q^n$, a étant un entier naturel et q une fraction irréductible.

1. 4 Racines carrées

Définition et règles de calcul

- Définition : Soit a un réel positif ou nul.
  $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif ou nul tel que l'on ait : $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.
  a est appelé le radicande du radical $\sqrt{a}$.
- Compatibilité avec le produit et le quotient :

  Pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b\neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples

1) $\sqrt{9}=3$ car $3^2=9$

2) $\sqrt{1}=1$ car $1^2=1$

3) $\sqrt{0}=0$ car $0^2=0$

4) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sqrt{(-2)^4}=\sqrt{2^4}=2^2=4$ car $\left(2^2\right)^2=2^4$

Exercice 4 1) Effectuer les calculs suivants : $\sqrt{6}\times\sqrt{24}$; $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$.

2) Écrire les nombres suivants sous la forme d'un multiple de $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{27},\ \frac{\sqrt{10}\sqrt{15}}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3^9} \text{ et } \sqrt{12}-\sqrt{48}.$$

2 Calcul littéral

En mathématiques, on écrit des expressions contenant des lettres comme x, y, z, a, b ...
Ces expressions servent à énoncer des propriétés. Les lettres utilisées désignent des nombres appelés *variables*. Par exemple, la propriété $x + y = y + x$ est vraie pour tous les réels x et y.
Ainsi on a $2 + 3 = 3 + 2$, ou $(x + y) + 2 = 2 + (x + y)$.

2. 1 Développements, factorisations

Règles de calcul sur les nombres réels

Pour tous réels a, b, c et d,

- Commutativité : $a + b = b + a$ et $ab = ba$
- Distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$a\,(b + c) = ab + ac \text{ et } (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

- **Identités remarquables**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

Preuve de ces trois égalités
D'après la règle de distributivité,
$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a\,(a + b) + b\,(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a\,(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)\,(a - b) = a\,(a - b) + b\,(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Il est fortement conseillé de connaître par cœur ces trois dernières égalités.

Exemples de développement

Développer, c'est transformer un produit en une somme comme l'illustrent les exemples suivants.

1) $5x(3 - x) = 15x - 5x^2$
2) $(x + 2)\,(x - 4) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$
3) $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$
4) $(y - 4)^2 = y^2 - 2 \times y \times 4 + 4^2 = y^2 - 8y + 16$
5) $(3x + 2)\,(3x - 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$
6) $\left(x\sqrt{12} + \sqrt{18}\right)^2 = \left(x\sqrt{12}\right)^2 + 2 \times x\sqrt{12} \times \sqrt{18} + \left(\sqrt{18}\right)^2 = 12x^2 + 2x\sqrt{12 \times 18} + 18$

$\left(x\sqrt{12} + \sqrt{18}\right)^2 = 2x^2 + 2x\sqrt{\underline{6} \times 2 \times \underline{6} \times 3} + 18 = 2x^2 + 6 \times 2x\sqrt{2 \times 3} + 18 = 2x^2 + 12x\sqrt{6} + 18$

Exercice 5 Développer les expressions suivantes.

$A = (x + 4)(x + 1)$ $B = (2x - 2)(3 + x)$ $C = (y - 2)(y + 2)$ $D = (3 - 2y)(2y + 3)$

$E = (-x - 1)^2 - (x + 1)^2$ $F = (x - 4)^2 - (x + 1)(x - 1)$ $G = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Exemples de factorisation

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit comme l'illustrent les exemples suivants.

1) $5x + 3x = (5 + 3)x = 8x$
2) $3x + 3y = 3(x + y)$
3) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$
4) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x + 5)^2$
5) $x(2 - x) + 5x(2 - x) = (x + 5x)(2 - x) = 6x(2 - x)$
6) $x^2 - 2 = x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$
7) $9x^2 - 6x\sqrt{2} + 2 = \left(3x - \sqrt{2}\right)^2$

Exercice 6 Factoriser les expressions suivantes.

$A = x^2 + x$ $B = y^2 - 2y + 1$ $C = x(2 + x) - 3(2 + x)$ $D = x^3 - 2x^2 + x$

$E = 36x^2 - 64$ $F = 16x^4 - 1$ $G = \frac{4}{25}x^2 - 3$ $H = 3x^4 - 2x^3\sqrt{3} + x^2$

2. 2 Calcul littéral avec des fractions

Les règles de calcul sur les fractions peuvent s'utiliser avec le calcul littéral, par exemple pour simplifier et réduire des expressions contenant des fractions comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemples

On suppose que les expressions considérées existent.

1) $\frac{x^3}{x} = x^{3-1} = x^2$

2) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x \times 3}{2 \times 3} - \frac{x \times 2}{3 \times 2} = \frac{3x - 2x}{6} = \frac{x}{6}$

3) $\frac{5x}{2} - \frac{3}{2x} = \frac{5x \times x}{2 \times x} - \frac{3}{2x} = \frac{5x^2 - 3}{2x}$

4) $\frac{5}{4x + 2} - \frac{2}{2x + 1} = \frac{5}{2 \times (2x + 1)} - \frac{2 \times 2}{2 \times (2x + 1)} = \frac{5 - 4}{2 \times (2x + 1)} = \frac{1}{2(2x + 1)}$

<u>Exercice 7</u> 1) On suppose que les expressions considérées existent. Réduire ces expressions.

$$A = \frac{2+x}{x} + \frac{4}{x^2} \qquad B = \frac{-2+x}{x} + \frac{4}{x^2} \qquad C = -\frac{2+x}{x} + \frac{4}{x^2} \qquad D = \frac{5}{(x+2)^2} - \frac{3x}{x+2}$$

$$E = \frac{\dfrac{6(x+1)}{x(x-1)(2x-2)}}{\dfrac{2x+2}{x^2(x-1)^2}} \qquad F = \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} \qquad G = \frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

2) Simplifier et exprimer le nombre $P = \dfrac{3^n+1}{2} + 5\left(\dfrac{3^n-1}{2}\right)$ en fonction de 3^{n+1}.

3 Résolution d'équations

3. 1 Équations du premier degré

Une équation du premier degré d'inconnue x est une équation qui peut se ramener à la forme $ax + b = 0$, a et b étant deux réels avec a non nul. Celle équation a une unique solution $\dfrac{-b}{a}$.

Cette méthode est illustrée par les exemples suivants.

Exemples

1) Résolution de l'équation d'inconnue x : $3x - 3 = x + 7$.

$$
\begin{aligned}
3x - 3 = x + 7 \quad &\Leftrightarrow 3x - 3 + 3 = x + 7 + 3 && \text{(on ajoute 3 aux deux membres de l'égalité)} \\
&\Leftrightarrow 3x = x + 10 \\
&\Leftrightarrow 3x - x = x - x + 10 && \text{(on ajoute } -x \text{ aux deux membres de l'égalité)} \\
&\Leftrightarrow 2x = 10 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{10}{2} && \text{(on divise par 2 les deux membres de l'égalité)} \\
&\Leftrightarrow x = 5
\end{aligned}
$$

Conclusion $\quad S = \{5\}$

<u>Exercice 8</u> 1) Résoudre mentalement les équations suivantes d'inconnue x.

$2x + 3 = 0 \qquad 4x - 5 = 3$

$3 - 4x = -5 \qquad 2x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-2}{3}$

2) Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

$2x - 6 = 9 - 3x$

$2\,(3 + x) - 6\,(-2 + 3x) = 2 - 4x$

$x - \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{5}{3}$

3. 2 Équations du second degré

Une équation du second degré d'inconnue x est une équation qui peut se ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$, a, b et c étant trois réels avec a non nul.

Résolution utilisant une factorisation

Après factorisation, on utilise la propriété suivante, dite « propriété du produit nul » :

Pour tous réels a et b : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Cette méthode est illustrée par les exemples suivants.

Exemples

1) Résoudre $4x^2 = 2x$

$$\begin{aligned} 4x^2 = 2x \quad &\Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x\,(2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion $S = \left\{0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

2) Résoudre $5x\,(x - 2) = 2\,(x - 2)$

$$\begin{aligned} 5x\,(x - 2) = 2\,(x - 2) &\Leftrightarrow 5x\,(x - 2) - 2\,(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (5x - 2)\,(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 2 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

Conclusion $S = \left\{\frac{2}{5}\ ;\ 2\right\}$

3) Résoudre $x^2 = 4$

$$\begin{aligned} x^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)\,(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

Conclusion $S = \{-2\ ;\ 2\}$

4) Résoudre $x^2 = 5$

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{5} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \text{ ou } x = \sqrt{5}$$

Conclusion $S = \left\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right\}$

Exercice 9 1) Résoudre mentalement les équations suivantes d'inconnue x.

$(2x + 3)(-1 + x) = 0$ $\left(x + \frac{1}{3}\right)(2x - 5) = 0$

$(-2x + 3)(1 - 3x) = 0$ $2x(x + 3)(2x - 5) = 0$

2) Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

$4x^2 - 6x = 0$

$36x^2 - 9 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Formules de résolution

Pour résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, on commence par calculer le *discriminant* de l'équation, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Cette méthode est illustrée par les exemples suivants.

Exemples

1) Résoudre $x^2 - 4x + 1 = 0$

Ici, on a : $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$. On a alors $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12 > 0$.

L'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{12}}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{12}}{2}$

soit $x_1 = \frac{4 + \sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Conclusion $S = \left\{2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3}\right\}$

2) Résoudre $2x^2 + 5x = 3$

L'équation se ramène $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Ici, on a : $a = 2$, $b = 5$ et $c = -3$. On a alors $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$.

L'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-5+7}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-5-7}{4}$

soit $x_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-12}{4} = -3$.

Conclusion $\quad S = \left\{-3 \,;\, \dfrac{1}{2}\right\}$

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

$x^2 + x - 12 = 0 \qquad x(x-2) = 1 \qquad 4x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad 2x^2 + 7x + 8 = 0$

Factorisation à vue et/ou résolution d'équation du second degré sans utiliser les formules donnant explicitement les solutions d'une équation du second degré en fonction du discriminant

Exemple Factorisation de $2x^2 + 7x + 6$ et résolution de l'équation d'inconnue x : $2x^2 + 7x + 6 = 0$.

Description de la méthode

1- **On cherche x_0 une solution évidente parmi les nombres suivants : 0, 1, –1, 2, –2, 3 et –3.**

0 n'est pas solution car $2 \times 0^2 + 7 \times 0 + 6 \neq 0$.

1 n'est pas solution car $2 \times 1^2 + 7 \times 1 + 6 \neq 0$.

–1 n'est pas solution car $2 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) + 6 \neq 0$.

2 n'est pas solution car $2 \times 2^2 + 7 \times 2 + 6 \neq 0$.

–2 est solution car $2 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$.

Ces calculs se font mentalement.

2- On factorise par $x - x_0$. On cherche alors de tête les valeurs des paramètres a et b pour que l'égalité $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$ soit vraie pour tout x.

On identifie de tête le coefficient constant : $2b = +6$ et le coefficient de x^2 : $a = 2$

$2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$

3- On conclut.

On a : $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$ et $2x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \dfrac{-3}{2}$

Remarque On peut développer mentalement $(x + 2)(2x + 3)$ afin de vérifier l'égalité $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$

Exercice 11 1) -1 est-il solution de l'équation : $x^2 - 1 = 0$?

-2 est-il solution de l'équation : $x^2 + 4 = 0$?

-2 est-il solution de l'équation : $x^2 - 2x - 8 = 0$?

2) Vérifier que -1 est solution de l'équation : $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 = 0$.

3) Résoudre les équations suivantes d'inconnue x après avoir cherché une solution évidente et une factorisation.

$3x^2 + 2x - 5 = 0$ $\qquad -x^2 + 8x + 9 = 0$ $\qquad x^2 + x\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = 0$

4 Dérivées et primitives de fonctions polynomiales

4. 1 Dérivées

f est définie sur D_f	$f(x)$	f est dérivable sur I	$f'(x)$
$D_f = \mathbb{R}$	$k, k \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	0
$D_f = \mathbb{R}$	x	$I = \mathbb{R}$	1
$D_f = \mathbb{R}$	x^2	$I = \mathbb{R}$	$2x$
$D_f = \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	x^n	$I = \mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

Les fonctions $u + v$, $\lambda\, u$ sont dérivables sur I et on a : $(u + v)' = u' + v'$ et $(\lambda\, u)' = \lambda\, u'$.

Exemples

$$\left(x^2 + x^3\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = 2x + 3x^2$$

$$\left(x - x^3\right)' = (x)' - \left(x^3\right)' = 1 - 3x^2$$

$$\left(3x^2\right)' = 3\left(x^2\right)' = 3 \times 2x = 6x$$

$$\left(\frac{x^2}{4} - 3x + 4\right)' = \frac{1}{4}\left(x^2\right)' - 3(x)' + (4)' = \frac{1}{4} \times 2x - 3 \times 1 + 0 = \frac{x}{2} - 3$$

Exercice 12 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \dfrac{x}{3}$ $\qquad g(x) = x^2\sqrt{5}$ $\qquad h(x) = \dfrac{\pi}{3}$ $\qquad k(x) = \dfrac{x^3}{4}$

2) $f(x) = 5x^3 - x^2 + \sqrt{2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{5x}{4}$ $\qquad h(x) = (2x - 3)^2$ $\qquad k(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{16}$

4. 2 Primitives

Soient f et F deux fonctions définies sur I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Dans ce cas, on définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

On dit que $f(t)$ est l'intégrande dans $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soient F une primitive de f sur I, G une primitive de g sur I et λ un réel.

$F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf.

Dans le tableau suivant, F est une primitive de f sur I et C désigne une constante réelle.

$f(x)$	$F(x)$	sur I
k, $k \in \mathbb{R}$	$kx + C$	$I = \mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + C$	$I = \mathbb{R}$
x^2	$\dfrac{x^3}{3} + C$	$I = \mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$I = \mathbb{R}$

Exemples

Une primitive de $x^2 + x^3$ est $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4}$.

Une primitive de $x - x^3$ est $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}$.

Une primitive de $3x^2$ est x^3.

Une primitive de $\dfrac{x^2}{4} - 3x + 4 = \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 4$ est $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{x^3}{3} - 3 \times \dfrac{x^2}{2} + 4 \times x = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x$.

Calcul de $\int_2^3 x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x$:

Une primitive de $x^2 + x + 1$ est $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$.

$$\int_2^3 x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right) = \left(3^2 + \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} + 2 + 2\right)$$

$$\int_2^3 x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \left(12 + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} + 4\right) = 8 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{48 + 27 - 16}{6} = \frac{59}{6}$$

Exercice 13 Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \dfrac{x}{3}$ $\quad g(x) = x^2\sqrt{5}$ $\quad h(x) = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad k(x) = \dfrac{x^3}{4}$

2) $f(x) = 5x^3 - x^2 + \sqrt{2}$ $\quad g(x) = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{5x}{4}$ $\quad h(x) = (2x-3)^2$ $\quad k(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{16}$

Exercice 14 Calculer :

$\int_{-2}^{2} 4x^3 \, \mathrm{d}x$ $\quad \int_{-1}^{1} -2x^2 + \dfrac{1}{4} \, \mathrm{d}x$ $\quad \int_{0}^{1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \, \mathrm{d}x$

$\int_{-1}^{2} \dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x \, \mathrm{d}x$ $\quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - 1\right)^2 \, \mathrm{d}x$ $\quad \int_{1}^{2} x\left(-x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$

$\int_{-2}^{2} 4x^3 \, \mathrm{d}t$ $\quad \int_{-2}^{2} 4t^3 \, \mathrm{d}t$ $\quad \int_{-2}^{2} 4xt^3 \, \mathrm{d}t$

$\int_{0}^{2} (4xt)^3 \, \mathrm{d}t$ $\quad \int_{-1}^{1} -2y^2 + \dfrac{1}{4} \, \mathrm{d}y$ $\quad \int_{0}^{1} \theta^3 - 2\theta^2 + 2\theta - 1 \, \mathrm{d}\theta$

4 Méli-mélo d'exercices

<u>Exercice 15</u> Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier relatif).

$$a=\frac{32}{40}\qquad b=\frac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}\qquad c=8^3\times\frac{1}{4^2}\qquad d=\frac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}\qquad e=\frac{27^k\times 2\times 4^k\times 3^{k-1}}{3\times 2^{k+2}\times 9^k}$$

<u>Exercice 16</u> Écrire les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

$$a=\frac{2}{4}-\frac{1}{3}\qquad b=\frac{2}{3}-0{,}2\qquad c=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5\qquad d=\frac{-2}{15}\div\left(\frac{-6}{5}\right)\qquad e=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{6}-1\right)$$

$$f=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}\times\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}\qquad g=\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}-\frac{2+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{2}$$

<u>Exercice 17</u> Mettre sous la forme d'une seule fraction qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

Pour n un entier naturel non nul, $a=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$.

Pour x et y deux entiers relatifs distincts, $b=\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{(x+y)^2}{x-y}$.

Pour x un réel strictement positif, $c=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $d=\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$.

<u>Exercice 18</u> 1) Pour n un entier naturel, exprimer simplement les entiers :

$$a=2^{n+1}-2^n \text{ et } b=4^{n+1}+3\times\left(2^n\right)^2-7\times 2^{2n}.$$

2) Pour n un entier naturel, on pose : $c=\dfrac{1}{1+n^2}-\dfrac{1}{(1+n)^2}$ et $d=(1+n^2)(1+n)^2$.

Simplifier cd autant que possible.

<u>Exercice 19</u> Écrire les fractions sous la forme $a+\dfrac{b}{c}$.

Soit x un réel différent de 1 et de 2.

$$a=\frac{29}{6}\qquad b=\frac{x}{x-1}\qquad c=\frac{x}{x-2}\qquad d=\frac{3x-1}{x-2}\qquad e=\frac{3x-4}{x-1}$$

Exercice 20 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

$a = 10^5.10^3$ $\quad b = \left(10^5\right)^3$ $\quad c = \dfrac{10^5}{10^3}$

$d = \dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ $\quad e = \dfrac{\left(10^5.10^{-3}\right)^5}{\left(10^{-5}.10^3\right)^{-3}}$ $\quad f = \dfrac{\left(10^3\right)^{-5}10^5}{10^3.10^{-5}}$

Exercice 21 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

$a = 3^4.5^4$ $\quad b = \left(5^3\right)^{-2}$ $\quad c = \dfrac{2^5}{2^{-2}}$

$d = (-7)^3.(-7)^{-5}$ $\quad e = \dfrac{6^5}{2^5}$ $\quad f = \dfrac{\left(30^4\right)^7}{2^{28}.5^{28}}$

Exercice 22 Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

On suppose que les expressions considérées existent.

$a = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ $\quad b = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$

$c = \dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ $\quad d = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$

Exercice 23 Développer, réduire et ordonner les expressions selon les puissances décroissantes de x.

$a = \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ $\quad b = \left(\dfrac{x}{12} + 3\right)^2$ $\quad c = (x+1)^2(x-1)$

$d = (x+1)^2(x-1)^2$ $\quad e = x\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)$ $\quad f = \left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$

Exercice 24 1) Factoriser les expressions suivantes.

$a = 36x^2 - 49$ $\quad b = x^2 + 4x + 4$ $\quad c = \dfrac{x^2}{4} - x + 1$

$d = (2x+1)^2 - (x-2)^2$ $\quad e = x\left(x^2-2\right) - \left(x^2-2\right)$ $\quad f = \left(x^2+2x+1\right) + 64x^2 - 64$

2) Factoriser $P_1(x) = 1 + x + \dfrac{x(x+1)}{2}$, puis $P_2(x) = 1 + x + \dfrac{x(x+1)}{2} + \dfrac{x(x+1)(x+2)}{6}$

puis $P_3(x) = 1 + x + \dfrac{x(x+1)}{2} + \dfrac{x(x+1)(x+2)}{6} + \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{24}$.

Exercice 25 Résoudre mentalement les équations suivantes.

1) $2x + 4 = 3x$ $\quad$ 2) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ $\quad$ 3) $2x^2 + 3x = 0$

4) $6x^2 = 6x$ $\quad$ 5) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ $\quad$ 6) $x(x+1)(2x-3) = 0$

7) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\quad$ 8) $x^2 - 5x = 0$ $\quad$ 9) $x^2 + 2x\sqrt{7} + 7 = 0$

Exercice 26 Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

c) $2x^2 + 5x - 7 = (x - 1)(ax + b)$

d) $2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)(ax + b)$

e) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(ax + b)$

f) $x^2 - 13x + 42 = (x - 6)(ax + b)$

Exercice 27 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé une solution évidente et factoriser l'expression.

1) $x^2 + 4x - 12 = 0$ 2) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ 3) $x^2 + 4x - 5 = 0$

4) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ 5) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ 6) $x^2 + 8x + 15 = 0$

7) $x^2 - 8x - 33 = 0$ 8) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ 9) $-x^2 + 2x + 15 = 0$

Exercice 28 Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

n est un entier naturel non nul.

1) $f(x) = x^2 + 4x - 12$ 2) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 3) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^2$

4) $f(x) = -(2x)^3 + 5x^2 - 6x$ 5) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x}{5}$ 6) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^2}{\sqrt{3}}$

7) $f(x) = x^{n+1} - 8x^n - 3$ 8) $f(x) = (7x)^{2n} + 23$ 9) $f(x) = -x^{2n+1} + 2x^{2n} - 5$

Exercice 29 Calculer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

n est un entier naturel non nul.

1) $f(x) = x^2 + 4x - 12$ 2) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 3) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^2$

4) $f(x) = -(2x)^3 + 5x^2 - 6x$ 5) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x}{5}$ 6) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^2}{\sqrt{3}}$

7) $f(x) = x^{n+1} - 8x^n - 3$ 8) $f(x) = (7x)^{2n} + 23$ 9) $f(x) = -x^{2n+1} + 2x^{2n} - 5$

Exercice 30 Calculer :

$\int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 + 2x \, \mathrm{d}x$ $\int_{-1}^{1} (2x - 3)^2 + 4x + 1 \, \mathrm{d}x$ $\int_1^{\sqrt{2}} 4x^3 - x^2 + 5 \, \mathrm{d}x$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 4x^2 + \dfrac{3}{5}x \, \mathrm{d}x$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2x + 3 \, \mathrm{d}x$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3x^2 - 2x + 1 \, \mathrm{d}x$

On factorisera les résultats finaux des deux dernières intégrales.

5 Réponses

Exercice 1

$A = 23$ $\qquad B = -3$

Exercice 2

$A = \frac{-1}{6}$ $\qquad B = \frac{10}{3}$ $\qquad C = \frac{2}{3} \times \frac{-4}{3} = \frac{-8}{9}$ $\qquad D = \frac{2}{9} - \frac{5}{3} = \frac{-13}{9}$ $\qquad E = \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$

$F = \frac{20}{9} - 1 = \frac{11}{9}$ $\qquad G = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ $\qquad H = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$

Exercice 3

$3^4 = 81$; $(-2)^3 = -8$, $-10^2 = -100$, $5^{-1} = 0{,}2$ $2^{-2} = 0{,}25$ et $3^{-2} = \frac{1}{9}$

$A = \frac{-1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{-7}{3}$, $B = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{9-6+4}{9} = \frac{7}{9}$, $C = 3^{2+3} = 3^5$, $D = \frac{3^{3n}}{2^n} \times \frac{3}{2^{-1}} = 6 \times \left(\frac{27}{2}\right)^n$

Exercice 4

$\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{6} \times \sqrt{6 \times 4} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{4} = 12$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{8}{32}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{10}\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10 \times 15}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{2} \times 5 \times 3 \times 5}{\cancel{2}}} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{3^9} = \sqrt{3^8 \times 3} = \sqrt{\left(3^4\right)^2 \times 3} = 3^4\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$

$\sqrt{12} - \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{4^2 \times 3} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

Exercice 5

$A = x^2 + 5x + 4$ $\quad B = 2x^2 + 4x - 6$ $\quad C = y^2 - 4$ $\quad D = 9 - 4y^2$

$E = 0$ car $(a + b)^2 = (-a - b)^2$ (**résultat à connaître**)

preuve $\quad (-a - b)^2 = (-(a + b))^2 = (-1)^2 (a + b)^2 = (a + b)^2$

Remarque : On a aussi $(a - b)^2 = (b - a)^2 = (-a + b)^2$

$F = (x^2 - 8x + 16) - (x^2 - 1) = -8x + 17$

$G = 6\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right) = 6\left(x^2 - \frac{5x}{6} + \frac{1}{6}\right) = 6x^2 - 5x + 1$

Exercice 6

$A = x(x+1)$ $\quad B = (y-1)^2$ $\quad C = (2+x)(x-3)$

$D = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$ $\quad E = (6x-8)(6x+8) = 4(3x-4)(3x+4)$

$F = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = (2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

$$G = \left(\frac{2x}{5} - \sqrt{3}\right)\left(\frac{2x}{5} + \sqrt{3}\right) \underset{\text{ou}}{=} \frac{1}{25}\left(2x - 5\sqrt{3}\right)\left(2x + 5\sqrt{3}\right)$$

$$H = x^2\left(3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1\right) = x^2\left(x\sqrt{3} - 1\right)^2$$

Exercice 7

$$A = \frac{(2+x)\times x}{x\times x} + \frac{4}{x^2} = \frac{(2+x)\times x + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2}$$

$$B = \frac{(-2+x)\times x}{x\times x} + \frac{4}{x^2} = \frac{(-2+x)\times x + 4}{x^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2}$$

$$C = \frac{-(2+x)\times x}{x\times x} + \frac{4}{x^2} = \frac{-(2+x)\times x + 4}{x^2} = \frac{-x^2 - 2x + 4}{x^2}$$

$$D = \frac{5}{(x+2)^2} - \frac{3x\times(x+2)}{(x+2)\times(x+2)} = \frac{5 - 3x\times(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 5}{(x+2)^2}$$

$$E = \frac{6(x+1)}{x(x-1)(2x-2)} \times \frac{x^2(x-1)^2}{2x+2} = \frac{\cancel{2}\times 3\times \underline{\underline{(x+1)}}\times x\times \cancel{x}\times \underline{(x-1)^2}}{\cancel{x}\times \underline{(x-1)}\times \cancel{2}\times \underline{(x-1)}\times 2\times \underline{\underline{(x+1)}}} = \frac{3x}{2}$$

$$F = \frac{x\times(x+1)}{(x-1)\times(x+1)} - \frac{2\times(x-1)}{(x+1)\times(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x\times(x+1) - 2\times(x-1) - 2}{(x-1)(x+1)}$$

$$F = \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

$$G = \frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1 + \dfrac{x^2}{1-x^2}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{1-x^2}}{\dfrac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1-x^2}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$P = \frac{3^n + 1}{2} + 5\left(\frac{3^n - 1}{2}\right) = \frac{1\times 3^n + 1 + 5\times 3^n - 5}{2} = \frac{(1+5)\times 3^n - 4}{2} = \frac{\cancel{2}\times 3\times 3^n}{\cancel{2}} - \frac{4}{2} = 3^1\times 3^n - 2 = 3^{n+1} - 2$$

Exercice 8

$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$

$4x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = 2$

$3 - 4x = -5 \Leftrightarrow x = 2$

$2x + \frac{1}{3} = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

$2x - 6 = 9 - 3x \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$

$2(3 + x) - 6(-2 + 3x) = 2 - 4x \Leftrightarrow 18 - 16x = 2 - 4x \Leftrightarrow 12x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$x - \frac{x+1}{2} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{6x}{6} - \frac{3(x+1)}{6} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow \frac{6x - 3(x+1)}{6} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow 3x - 3 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$

Exercice 9

$(2x + 3)(-1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$ ou $x = 1$

$\left(x + \frac{1}{3}\right)(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$ ou $x = \frac{5}{2}$

$(-2x + 3)(1 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{3}$

$2x(x + 3)(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 0$ ou $x = \frac{5}{2}$

$4x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$

$36x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (6x + 3)(6x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Exercice 10

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 3$

$x(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$

$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

L'équation $2x^2 + 7x + 8 = 0$ a un discriminant négatif donc elle n'a pas de solution réelle.

Exercice 11

1) -1 est solution de l'équation : $x^2 - 1 = 0$ car $(-1)^2 - 1 = 0$.

-2 n'est pas solution de l'équation : $x^2 + 4 = 0$ car $(-2)^2 + 4 = 8 \neq 0$.

-2 est solution de l'équation : $x^2 - 2x - 8 = 0$ car $(-2)^2 + 4 - 8 = 0$.

2) -1 est solution de l'équation : $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 = 0$ car $-3 - 4 + 13 - 6 = 0$

3) $3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \dfrac{-5}{3}$.

$-x^2 + 8x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(-x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 9$.

$x^2 + x\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x+1+\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1-\sqrt{3}$ ou $x = 1$.

Exercice 12

1) $f'(x) = \dfrac{1}{3}$ $\quad g'(x) = 2x\sqrt{5}$ $\quad h'(x) = 0$ $\quad k'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$

2) $f'(x) = 15x^2 - 2x$ $\quad g'(x) = 3x - \dfrac{5}{4}$ $\quad h'(x) = 8x - 12 = 4(2x - 3)$ $\quad k'(x) = \dfrac{4x^3 - 6x}{16} = \dfrac{2x^3 - 3x}{8}$

Exercice 13

1) $F(x) = \dfrac{x^2}{6}$ $\quad G(x) = \dfrac{x^3\sqrt{5}}{3}$ $\quad H(x) = \dfrac{\pi}{3}x$ $\quad K(x) = \dfrac{x^4}{16}$

2) $F(x) = \dfrac{5x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + x\sqrt{2}$ $\quad G(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x^2}{8}$ $\quad H(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 6x^2 + 9x$ $\quad K(x) = \dfrac{x^5}{80} - \dfrac{x^3}{16}$

Exercice 14

$$\int_{-2}^{2} 4x^3 \,\mathrm{d}x = \left[x^4\right]_{-2}^{2} = 0 \qquad \int_{-1}^{1} -2x^2 + \frac{1}{4} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{x}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{-5}{6}$$

$$\int_{0}^{1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 - x\right]_{0}^{1} = \frac{-5}{12}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^4}{16} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{21}{16}$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^4 - 2x^2 + 1 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{203}{480}$$

$$\int_{1}^{2} x\left(-x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \int_{1}^{2} -x^3 + x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} = \frac{-9}{4}$$

$\int_{-2}^{2} 4x^3 \, dt = \int_{-2}^{2} 4x^3 \times 1 \, dt = 4x^3 \int_{-2}^{2} 1 \, dt = 4x^3 \times [t]_{-2}^{2} = 16x^3$

$\int_{-2}^{2} 4t^3 \, dt = \left[t^4\right]_{-2}^{2} = 0$

$\int_{-2}^{2} 4xt^3 \, dt = x \times \int_{-2}^{2} 4t^3 \, dt = x \times \left[t^4\right]_{-2}^{2} = 0$

$\int_{0}^{2} (4xt)^3 \, dt = \int_{0}^{2} (4x)^3 t^3 \, dt = (4x)^3 \times \int_{0}^{2} t^3 \, dt = (4x)^3 \times \left[\frac{t^4}{4}\right]_{0}^{2} = (4x)^3 \times \frac{2^4}{4} = 4^4 x^3 = 256x^3$

$\int_{-1}^{1} -2y^2 + \frac{1}{4} \, dy = \left[\frac{-2y^3}{3} + \frac{y}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{-5}{6}$

$\int_{0}^{1} \theta^3 - 2\theta^2 + 2\theta - 1 \, d\theta = \left[\frac{\theta^4}{4} - \frac{2\theta^3}{3} + \theta^2 - \theta\right]_{0}^{1} = \frac{-5}{12}$

Exercice 15

$a = \frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}$ $\quad b = \frac{\left(2^2\right)^2}{27 \times 3^{-4} \times 2^4} = \frac{1}{3^3 \times 3^{-4}} = 3$ $\quad c = \frac{(2 \times 4)^3}{4^2} = \frac{2^3 \times 4^3}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5 = 32$

$d = \frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{-2 \times (-2)^{2k} \times 3^{2k-1+k-1}}{4^k} = -2 \times 3^{3k-2}$

$e = \frac{3^{3k} \times 2 \times 2^{2k} \times 3^{k-1}}{3 \times 2^{k+2} \times 3^{2k}} = 3^{2k-2} \times 2^{k-1} = \frac{9^k}{9} \times \frac{2^k}{2} = 18^{k-1}$

Exercice 16

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\quad b = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$ $\quad c = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3} = 9$ $\quad d = \frac{-2}{15} \times \left(\frac{5}{-6}\right) = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}$

$e = \frac{-1}{2} \times \frac{-5}{6} = \frac{5}{12}$ $\quad f = \frac{\frac{11}{3 \times 4}}{\frac{11}{3 \times 5}} \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{11 \times 3 \times 5 \times 8}{11 \times 3 \times 4 \times 3 \times 5} = \frac{2}{3}$

$g = \frac{\frac{23}{6}}{\frac{23}{20}} - \frac{\frac{11}{4}}{\frac{11}{6}} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{10}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{20 - 9 - 4 - 1}{6} = 1$

Exercice 17

$$a=\frac{1\times n}{(n+1)^2\times n}+\frac{1\times(n+1)\times n}{(n+1)\times(n+1)\times n}-\frac{1\times(n+1)^2}{n\times(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n\times(n+1)^2}=\frac{-1}{n\times(n+1)^2}$$

$$b=\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}-\frac{(x+y)^2}{x-y}=\frac{(x+y)}{x-y}-\frac{(x+y)^2}{x-y}=\frac{(x+y)-(x+y)^2}{x-y}=\frac{(x+y)(1-x-y)}{x-y}$$

$$c=\frac{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x} \qquad d=\frac{(\sqrt{n}+1)^2-(\sqrt{n}-1)^2}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)}=\frac{4\sqrt{n}}{n-1}$$

Exercice 18

$a=2\times 2^n-2^n=2^n$ et $b=4\times 4^n+3\times 4^n-7\times 4^n=0$

$$cd=\left(\frac{1}{1+n^2}-\frac{1}{(1+n)^2}\right)(1+n^2)(1+n)^2=\frac{(1+n^2)(1+n)^2}{1+n^2}-\frac{(1+n^2)(1+n)^2}{(1+n)^2}=(1+n)^2-(1+n^2)=2n$$

Exercice 19

$$a=\frac{24+5}{6}=\frac{24}{6}+\frac{5}{6}=4+\frac{5}{6} \text{ ou } a=\frac{30-1}{6}=5-\frac{1}{6} \qquad b=\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$$

$$c=\frac{x-2+2}{x-2}=1+\frac{2}{x-2} \qquad d=\frac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\frac{5}{x-2} \qquad e=\frac{3(x-1)-1}{x-1}=3-\frac{1}{x-1}$$

Exercice 20

$a=10^8$ $\qquad b=10^{15}$ $\qquad c=10^2$

$d=10^{-2}$ $\qquad e=\dfrac{(10^2)^5}{(10^{-2})^{-3}}=\dfrac{10^{10}}{10^6}=10^4$ $\qquad f=\dfrac{10^{-15+5}}{10^{-2}}=10^{-8}$

Exercice 21

$a=15^4$ $\qquad b=5^{-6}$ $\qquad c=2^7$

$d=(-7)^{-2}=7^{-2}$ $\qquad e=\dfrac{3^5.2^5}{2^5}=3^5$ $\qquad f=\dfrac{30^{28}}{10^{28}}=3^{28}$

Exercice 22

$$a=\frac{x\times(x+1)}{(x-1)\times(x+1)}-\frac{2\times(x-1)}{(x+1)\times(x-1)}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x^2-x}{(x+1)\times(x-1)}=\frac{x}{x+1}$$

$$b=\frac{2\times(x-2)}{(x+2)\times(x-2)}-\frac{1\times(x+2)}{(x-2)\times(x+2)}+\frac{8}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x-2)\times(x+2)}=\frac{1}{x-2}$$

$$c=\frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2x^2}{x^3-x}=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}$$

$$c=\frac{x\times(x+1)}{(x-1)\times(x+1)}+\frac{x\times(x-1)}{(x+1)\times(x-1)}-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x^2-2x}{(x+1)\times(x-1)}=\frac{2x}{x+1}$$

$$d=\frac{1}{x}+\frac{x+2}{(x-2)\times(x+2)}+\frac{2}{(x-2)\times x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)\times x}=\frac{1\times(x-2)}{x\times(x-2)}+\frac{1\times x}{(x-2)\times x}+\frac{2}{(x-2)\times x}=\frac{2}{x-2}$$

Exercice 23

$$a=4x^2-2x+\frac{1}{4}$$

$$b=\frac{x^2}{144}+\frac{x}{2}+9$$

$$c=(x+1)\underbrace{(x+1)(x-1)}=(x+1)\left(x^2-1\right)=x^3+x^2-x-1$$

$$d=\left((x+1)(x-1)\right)^2=\left(x^2-1\right)^2=x^4-2x^2+1$$

$$e=x\left[\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)\right]=x\left(x^4-4\right)=x^5-4x$$

$$f=\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=x^4+1$$

Exercice 24

$a=(6x+7)(6x-7) \quad b=(x+2)^2 \quad c=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$d=(2x+1)^2-(x-2)^2=\left((2x+1)-(x-2)\right)\left((2x+1)+(x-2)\right)=(x+3)(3x-1)$

$e=(x-1)(x^2-2)=(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$f=(x+1)^2+64(x^2-1)=(x+1)^2+64(x-1)(x+1)=(x+1)(65x-63)$

$P_1(x)=1+x+\frac{x(x+1)}{2}=(x+1)\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}(x+1)(x+2)$

$P_2(x)=1+x+\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{6}=P_1(x)+\frac{x(x+1)(x+2)}{6}=\frac{1}{2}(x+1)(x+2)+\frac{x(x+1)(x+2)}{6}$

$P_2(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{2}\left(1+\frac{x}{3}\right)=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{6}$

$P_3(x)=P_2(x)+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{24}=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{6}+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{24}$

$P_3(x)=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{6}\left(1+\frac{x}{4}\right)=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{24}$

Exercice 25

1) $x=4$

2) $(3x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{3}$

3) $x(2x+3)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$ ou $x=0$

4) $x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=0$

5) $4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

6) $x=-1$ ou $x=0$ ou $x=\frac{3}{2}$

7) $(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$

8) $x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$

9) $\left(x+\sqrt{7}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{7}$

Exercice 26

$2x^2+7x+6=(x+2)\,(2x+3)$

$-3x^2+14x-15=(x-3)\,(-3x+5)$

$2x^2+5x-7=(x-1)\,(2x+7)$

$2x^2-5x-7=(x+1)\,(2x-7)$

$x^2-5x+6=(x-2)\,(x-3)$

$x^2-13x+42=(x-6)\,(x-7)$

Exercice 27

1) $(x-2)(x+6)$ 2) $(x-1)(3x+1)$ 3) $(x-1)(x+5)$

$x \in \{-6\ ;\ 2\}$ $x \in \left\{-\frac{1}{3}\ ;\ 1\right\}$ $x \in \{-5\ ;\ 1\}$

4) $(x-1)(3x-8)$ 5) $(x+1)(5x+19)$ 6) $(x+3)(x+5)$

$x \in \left\{1\ ;\ \frac{8}{3}\right\}$ $x \in \left\{-1\ ;\ \frac{-19}{5}\right\}$ $x \in \{-3\ ;\ -5\}$

7) $(x+3)(x-11)$ 8) $(x+3)(7x+2)$ 9) $(x+3)(-x+5)$

$x \in \{-3\ ;\ 11\}$ $x \in \left\{-3\ ;\ \frac{-2}{7}\right\}$ $x \in \{-3\ ;\ 5\}$

Exercice 28

1) $2x+4$ 2) $6x-2$ 3) $4x^3+4x$

4) $-24x^2+10x-6$ 5) $\dfrac{4x-5}{5}$ 6) $\dfrac{8x^3-10x}{\sqrt{3}}$

7) $(n+1)x^n-8nx^{n-1}$ 8) $7^{2n}(2n)x^{2n-1}$ 9) $-(2n+1)x^{2n}+4nx^{2n-1}$

Exercice 29

1) $\dfrac{x^3}{3}+2x^2-12x$ 2) x^3-x^2-x 3) $\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x$

4) $-2x^4+\dfrac{5}{3}x^3-3x^2$ 5) $\dfrac{2x^3}{15}-\dfrac{x^2}{2}$ 6) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2x^5}{5}-\dfrac{5x^3}{3}\right)$

7) $\dfrac{x^{n+2}}{n+2}-8\dfrac{x^{n+1}}{n+1}-3x$ 8) $\dfrac{7^{2n}x^{2n+1}}{2n+1}+23x$ 9) $\dfrac{-x^{2n+2}}{2n+2}+\dfrac{2x^{2n+1}}{2n+1}-5x$

Exercice 30

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2+2x\,\mathrm{d}x=\left[x^3+x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$$

$$\int_{-1}^{1} (2x-3)^2+4x+1\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} 4x^2-8x+10\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4x^3}{3}-4x^2+10x\right]_{-1}^{1}=\frac{68}{3}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 4x^3-x^2+5\,\mathrm{d}x=\left[x^4-\frac{x^3}{3}+5x\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{13\sqrt{2}-5}{3}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 4x^2+\frac{3}{5}x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{10}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}=\frac{117}{160}-\frac{29}{120}=\frac{117\times 3}{160\times 3}-\frac{29\times 4}{120\times 4}=\frac{351-116}{480}=\frac{235}{480}=\frac{47}{96}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2x+3\,\mathrm{d}x=\left[x^2+3x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi^2}{16}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3x^2-2x+1\,\mathrm{d}x=\left[x^3-x^2+x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{7\pi^3}{216}-\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\left(\frac{7\pi^2}{36}-\frac{\pi}{2}+1\right)$$